Marcel Grangé

Calcul différentiel

Cours et exercices

2e édition

ellipses

Chapitre 1

Différentiabilité

Le principal objet du calcul différentiel est d'évaluer la *différence*

$$f(x+h)-f(x)$$

accroissement d'une application f définie au voisinage d'un point x d'un espace normé E, à valeurs dans un espace normé F. Si l'application f était la restriction d'une application linéaire, l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ vaudrait $f(h)$, et tout serait dit ! De ce fait, la grande idée du calcul différentiel est de déterminer s'il est possible de trouver, en chaque point x où l'application f est définie, une *application linéaire* L_x telle que l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ soit « à peu près » l'accroissement de L_x, c'est-à-dire $L_x(h)$. En fait on exige que l'application linéaire L_x soit continue, de manière à que différentiabilité entraîne continuité. Il est bon de préciser l'expression « à peu près » employée ci-dessus, selon un point de vue déjà adopté pour les fonctions réelles d'une variable réelle, qu'on pourrait exprimer ainsi : au voisinage « très proche » d'un point, une « bonne » courbe est « à peu près » confondue avec la droite tangente en ce point (du latin *tangere* : toucher), ainsi l'application linéaire L_x « mesure » la dose de proportionnalité dans l'accroissement de l'application f.

Souvent certains préconisent de choisir les espaces normés de dimension finie, mais cette hypothèse n'apporte aucune simplification significative, et peut même masquer l'essence d'un concept ou d'un résultat. Aussi, dans cet ouvrage est développé le calcul différentiel dans le cadre des espaces normés, ou espaces de ***Banach***, selon le cas. Cependant, il est parfois précisé que tel ou tel espace normé est de dimension finie lorsque cela est pertinent.

1.1 Notations et rappels

Ce qui suit concerne tous les chapitres.

1. ***Tous les espaces normés considérés sont réels*** (sauf mention expresse du contraire). Rappelons qu'un espace normé réel est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, muni d'une norme. Notons que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace normé réel de dimension 2, la norme étant le module. Plus généralement tout espace normé complexe est aussi un espace normé réel.

Dans un espace normé on dispose des notions classiques de topologie : ***ouvert***, ***fermé***, ***intérieur***, ***adhérence***, ***suite convergente***, ***continuité*** des applications entre parties d'espaces normés, partie ***compacte***, partie ***connexe***, etc.

On dispose aussi des notions classiques de structure uniforme : ***suite de Cauchy***, partie ***complète***, ***uniforme continuité*** d'une application entre parties d'espaces normés, enfin la notation choisie pour la boule ouverte de centre x et de rayon r est $B(x,r)$ et pour la boule fermée de centre x et de rayon r est $\overline{B}(x,r)$.

Un ***espace de Banach*** est un espace normé complet. Rappelons qu'un espace normé de dimension finie est complet et que sur un tel espace toutes les normes sont équivalentes. Sur un espace normé on dispose d'une notion utile de partie ***bornée***, de ***suite bornée***.

Enfin on rappelle que ***dans un espace de Banach, tout série absolument convergente est convergente****, et que la norme de la somme d'une telle série est inférieure ou égale à la somme de la série des normes.*

2. Étant donnés deux espaces normés désignés par E et F on note $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace vectoriel normé formé des *applications linéaires* ***continues*** de E dans F. Lorsque l'espace normé de départ E ***est*** *de dimension finie*, toute application linéaire de E dans un espace normé F est continue.

Lorsque l'espace normé de départ E ***n'***est ***pas*** de dimension finie et F ***n'***est ***pas*** $\{0\}$, l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ ***n'***est ***pas*** réduit à $\{0\}$, et loin de là car *pour tout x de E, $x \neq 0$, il existe une forme linéaire continue φ sur E vérifiant $\varphi(x) \neq 0$* : ce fait, ici admis, relève du théorème de Hahn-Banach.

Un **isomorphisme de l'espace normé** E **sur l'espace normé** F est une bijection linéaire bi-continue et l'inverse d'un isomorphisme L est noté L^{-1}. L'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $Isom(E,F)$.

La norme sur $\mathscr{L}(E,F)$, dite **norme subordonnée** (à celles de E et F), est définie comme suit

$$\|L\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)\|$$

Si K appartient à $\mathscr{L}(E,F)$ et L à $\mathscr{L}(F,G)$, alors $L\circ K$, souvent noté LK, appartient à $\mathscr{L}(E,G)$ et on a l'inégalité : $\|LK\| \leq \|L\|\,\|K\|$

3. La notion de *produit cartésien fini d'espaces normés* est supposée connue, ainsi que la notion d'*application n-linéaire continue* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{M} F$ entre espaces normés, et sa norme, dite **norme subordonnée** (à celles de $E_1, \ldots, E_n$ et F), est définie comme suit

$$\|M\| = \sup_{x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0} \frac{\|M(x_1, \cdots x_n)\|}{\|x_1\| \ldots \|x_n\|} = \sup_{\|x_1\|=1, \ldots, \|x_n\|=1} \|M(x_1, \cdots x_n)\|$$

$$= \sup_{\|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_n\| \leq 1} \|M(x_1, \cdots x_n)\|$$

Si les espaces normés E_j sont de dimension finie, toute application n-linéaire du produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans un espace normé F est continue. Par ailleurs, étant donné un espace normé E on note E^n le produit cartésien

$$\overbrace{E \times \cdots \times E}^{n}$$

4. Une application f d'un ensemble X dans un ensemble Y pourra être notée indifféremment

$$X \xrightarrow{f} Y \quad ou \quad f : X \longrightarrow Y$$

5. Enfin, lorsqu'une application f, à valeurs dans un espace normé F, est définie sur un ouvert *épointé* $U \setminus \{a\}$ d'un espace normé E, où le point a appartient à $\overline{U}$, et possède une limite en a, le symbole $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x)$ désigne cette limite.

1.2 Applications différentiables

1.2.1 Premières définitions

Définition 1.1. Soient deux espaces normés E et F, une application $\Omega \xrightarrow{f} F$ définie sur un ouvert non vide Ω de E, et un point x de Ω. On dit que l'application f est **différentiable en** x s'il existe une *application linéaire continue* L_x de E dans F telle qu'on ait

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \|h\|^{-1} \big(f(x+h) - f(x) - L_x(h)\big) = 0$$

condition qui peut s'écrire aussi

$$f(x+h) - f(x) = L_x(h) + \|h\| \, \varepsilon_x(h)$$

où l'application ε_x, notée aussi ε_x^f, est définie dans l'ouvert épointé $\big(-x+\Omega\big) \setminus \{0\}$, et possède la propriété

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \varepsilon_x(h) = 0$$

Proposition 1.2. ***Propriété d'unicité.***

Si dans les conditions ci-dessus l'application f est différentiable en x relativement aux applications linéaires continues L_1 et L_2, alors $L_1 = L_2$.

Démonstration. Soit $u \in E$, par différence on a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} t^{-1}\big(L_1(tu) - L_2(tu)\big) = 0$$

c'est-à-dire l'égalité $(L_1 - L_2)(u) = 0$ parce que les applications linéaires L_1 et L_2 sont homogènes, et cela pour tout vecteur u, donc $L_1 = L_2$. □

Définition 1.3. L'application linéaire continue L_x est appelée *application linéaire tangente en* x, ou **différentielle de** f **en** x.

Certains s'obstinent à l'appeler « dérivée de f en x », ce que nous ne faisons pas, eu égard au concept de dérivée directionnelle, présenté plus loin.

La différentielle est dorénavant notée $Df(x)$, ***et on préfère écrire*** $Df(x) \cdot h$ ***au lieu de*** $Df(x)(h)$.

Fait 1.4. ***Le cas particulier*** $E = \mathbb{R}$

La condition de différentiabilité s'écrit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big) = L_x(1)$$

On dit que l'application f *est* **dérivable en** *x, de* **dérivée** $L_x(1)$, *qui est un vecteur de* F *qu'on note* $f'(x)$, *parfois même* $\dot{f}(x)$ *en Mécanique.*

Démonstration. En effet, dans ce cas on a l'égalité $L_x(h) = hL_x(1)$; ainsi la condition de différentiabilité s'écrit

$$h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big) = L_x(1) + h^{-1}|h|\,\varepsilon_x(h)$$

□

Remarque 1.5.

1. *Dans le cas particulier* $E = \mathbb{R}$ on a donc

$$f'(x) = Df(x) \cdot 1$$

On confond souvent, sans que cela soit nécessaire, la dérivée $f'(x)$ et la différentielle $Df(x)$; le fait que l'application $L \longmapsto L(1)$ soit une isométrie surjective de l'espace normé $\mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$ sur l'espace normé F légitime cet abus.

2. *Dans le cas particulier* $E = \mathbb{R}$ et $\Omega = J$ intervalle non vide et non nécessairement ouvert, il est commode d'introduire les concepts de **dérivée-à-gauche** et de **dérivée-à-droite**, dont les définitions vont d'elles-mêmes : la dérivée-à-gauche en l'extrémité droite de J, ou la dérivée-à-droite en l'extrémité gauche de J.

3. ***Si l'espace de départ*** E ***est de dimension finie***, il n'est pas nécessaire de supposer dans la définition 1 que l'application linéaire $L_x = Df(x)$ est continue, car la continuité est, dans ce cas, ***automatique***.

4. *L'application* f *est différentiable en* x *et de différentielle* $Df(x) = L$ est un énoncé qui dépend a priori des normes dont sont munis les espaces vectoriels E et F, mais en réalité *ne dépend que de la classe d'équivalence de chaque norme pour la relation « équivalence des normes »*. Autrement dit les définitions, propositions, faits et remarques précédents ne changent pas lorsqu'on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes. De plus, si les deux espaces vectoriels E et F sont de dimension finie, l'énoncé « l'application f est différentiable en x et de différentielle $Df(x) = L$ » ne dépend que des structures vectorielles de E et F, car dans ce cas particulier toutes les normes sont équivalentes.

Proposition 1.6.

Dans les conditions de la définition 1.1 *l'application* f *est continue au point* x.

Démonstration. On a l'inégalité

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|h\| \left(\|Df(x)\| + \|\varepsilon_x(h)\|\right)$$

Lorsque le vecteur h tend vers 0, le membre de droite de cette inégalité tend évidemment vers 0. □

Remarque 1.7.

Si dans la définition 1.1 on ne suppose pas l'application linéaire L_x continue, mais supposant l'application f continue en x, alors l'application linéaire L_x est continue. En effet

$$\|L_x(h)\| \leq \|f(x+h) - f(x)\| + \|h\| \, \|\varepsilon_x(h)\|$$

Supposant l'application f différentiable en x comme dans la définition 1, on dispose des « objets »

$$\begin{gathered} le\ vecteur\ Df(x) \cdot h\ appartenant\ à\ l'espace\ normé\ F \\ le\ vecteur\ Df(x)\ \ appartenant\ à\ l'espace\ normé\ \mathscr{L}(E,F) \end{gathered}$$

éventuellement d'un autre « objet » quand l'application f est différentiable en *tout* point x de l'ouvert Ω, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 1.8. Soient deux espaces normés E et F, une application $\Omega \xrightarrow{f} F$ définie sur un ouvert non vide Ω de E. Si l'application f est différentiable en *tout* point x de l'ouvert Ω, on dit que l'application f est **différentiable dans** Ω. Apparaît alors la *nouvelle application*

$$\Omega \xrightarrow{Df} \mathscr{L}(E,F)$$

appelée **l'application différentielle de** f. Lorsque l'application Df est continue sur Ω on dit que l'application f est **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** Ω.

On veillera à ne pas confondre Df***,*** $Df(x)$ ***et*** $Df(x)\cdot h$

Déterminer Df revient à déterminer tous les $Df(x)$, et déterminer $Df(x)$ revient à déterminer tous les $Df(x)\cdot h$. C'est pourquoi le fait suivant a toute son importance.

Fait 1.9.

Lorsqu'une application f est différentiable en x on a

$$Df(x)\cdot h=\lim_{\substack{t\to 0\\ \neq}} t^{-1}\big(f(x+th)-f(x)\big)$$

Démonstration. En effet, l'expression

$$t^{-1}\big(f(x+th)-f(x)\big)=Df(x)\cdot h+t^{-1}\,|t|\,\|h\|\,\varepsilon_x(th)$$

tend vers le vecteur $Df(x)\cdot h$ lorsque t tend vers 0. □

Ce fait permet de *calculer* $Df(x)$ si l'on sait *déjà* que l'application f est différentiable en x, ou bien de *conjecturer* ce que doit être $Df(x)$ si l'on cherche à prouver que l'application f est différentiable en x. Néanmoins la limite ci-dessus peut exister sans que l'application f soit différentiable. Aussi, il n'est pas sans intérêt d'introduire la définition qui suit.

Définition 1.10. Soient deux espaces normés E et F, une application $\Omega\xrightarrow{f}F$ définie sur un ouvert non vide Ω de E, et un point x de Ω. lorsque la limite

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ \neq}} t^{-1}\big(f(x+th)-f(x)\big)$$

existe, on l'appelle **dérivée de** f **en** x **dans la direction** h, et on la désigne par $\partial_h f(x)$. On emploie parfois l'expression « **dérivée directionnelle** ».

Il est bon d'observer que si la dérivée directionnelle $\partial_h f(x)$ existe, alors pour tout scalaire $\lambda\neq 0$ la dérivée directionnelle $\partial_{\lambda h}f(x)$ existe aussi et

$$\partial_{\lambda h}f(x)=\lambda\,\partial_h f(x)$$

Fait 1.11.

Si l'application f est différentiable en a, lorsque l'espace normé E est de dimension finie et muni d'une base $\big(e_1,\dots,e_n\big)$, pour tout $h=\sum_{1\leq j\leq n}h_je_j$ de E on a la formule

$$Df(a)\cdot h=\sum_{1\leq j\leq n}h_j\partial_{e_j}f(a)$$

Démonstration. L'égalité $Df(a) \cdot h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j Df(a) \cdot e_j$ résume la preuve. $\square$

Cependant, toutes les dérivées directionnelles de f en x peuvent exister, sans que l'application f soit différentiable en x, ni même que l'application $h \longmapsto \partial_h f(x)$ soit linéaire. Toutefois, la linéarité de l'application $h \longmapsto \partial_h f(x)$ n'implique pas non plus la différentiabilité de f au point x. L'exemple 1.12 ci-dessous illustre ces phénomènes.

Exemple 1.12.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^{-1} x^2 y & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les dérivées directionnelles $\partial_{(u,v)} f(0,0)$ existent toutes, mais $(u,v) \longmapsto \partial_{(u,v)} f(0,0)$ n'est pas linéaire. Notons que la fonction f est continue en $(0,0)$.

2. $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^4+y^2\right)^{-1} x^3 y & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les dérivées directionnelles $\partial_{(u,v)} f(0,0)$ sont nulles, ainsi $(u,v) \longmapsto \partial_{(u,v)} f(0,0)$ est linéaire, mais la fonction f n'est pas différentiable en $\big(0,0\big)$. Notons que l'application f est continue en $(0,0)$.

3. $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^4+y^2\right)^{-1} x^3 |y|^{\frac{3}{2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est différentiable sur E, et l'application Df n'est pas continue en $(0,0)$, mais est continue en tout autre point.

4. $E = \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin\left(t^{-1}\right) dt & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur E, et la fonction f' n'est pas continue en $x = 0$, mais est continue en tout autre point.

Proposition 1.13.

Soit une fonction réelle f définie et différentiable sur un ouvert Ω d'un espace normé E. Si la fonction f admet au point a de Ω un maximum ou un minimum, alors $Df(a) = 0$.

Démonstration. Le signe de la quantité $t^{-1}\big(f(a+th)-f(a)\big)$ ne dépend que du signe de t. Donc le signe du nombre réel $Df(a)\cdot h$ ne dépend pas de h, ce qui impose à la forme linéaire $Df(a)$ d'être nulle. □

Corollaire 1.14. ***Théorème de Darboux***

Soit une fonction réelle f définie et dérivable sur un intervalle non vide J de $\mathbb{R}$. Alors le sous-ensemble $f'(J)$ est un intervalle.

Démonstration. Soient u et v appartenant à $f'(J)$ vérifiant $u<v$, et w appartenant à $\left]u,v\right[$. Il existe a et b dans J tels qu'on ait $u=f'(a)$ et $v=f'(b)$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer $a<b$. Considérons la fonction g définie sur J par

$$g(x)=f(x)-wx$$

On a $g'(a)=f'(a)-w<0$ et $g'(b)=f'(b)-w>0$. Pour tout accroissement $h>0$, assez petit

$$\begin{cases} g(a+h)-g(a)=h\big(g'(a)+o(1)\big) \\ g(b-h)-g(b)=h\big(-g'(b)+o(1)\big) \end{cases}$$

D'où l'on tire que pour tout accroissement $h>0$, assez petit

$$g(a+h)<g(a) \quad et \quad g(b-h)<g(b)$$

Ainsi on obtient que le minimum de la fonction continue g restreinte au segment $\left[a,b\right]$ est strictement inférieur et à $g(a)$ et à $g(b)$, minimum atteint en un point c appartenant donc à $\left]a,b\right[$. Mais alors on a $g'(c)=0$, c'est-à-dire $f'(c)=w$. □

1.2.2 Études de cas particuliers importants

Proposition 1.15.

1. *Une application constante est différentiable dans l'ouvert où elle est définie, et son application différentielle est l'application nulle.*

2. *Une application linéaire continue $E\xrightarrow{L}F$ entre espaces normés est différentiable dans E, et pour tout x de E*

$$DL(x)=L$$

3. *Une application bilinéaire continue $E_1\times E_2\xrightarrow{B}F$ entre espaces normés est différentiable dans $E_1\times E_2$, et*

$$DB(x_1,x_2)\cdot(h_1,h_2)=B(h_1,x_2)+B(x_1,h_2)$$

C'est aussi le cas d'une application n-linéaire continue $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n\xrightarrow{M}F$, et

$$DM(x_1,\cdots,x_n)\cdot(h_1,\cdots,h_n)=\sum_{1\le j\le n}M(x_1,\cdots,h_j,\cdots x_n)$$