

Marcel Grangé

Calcul différentiel

Cours et exercices

2^e édition



ellipses

Table des matières

1	Différentiabilité	7
1.1	Notations et rappels	7
1.2	Applications différentiables	9
1.2.1	Premières définitions	9
1.2.2	Études de cas particuliers importants	14
1.2.3	Propriétés algébriques de la différentiation	16
1.2.4	Applications de plusieurs variables	19
1.2.4.1	Généralités incontournables	19
1.2.4.2	Le gradient	21
1.2.5	Matrices jacobiniennes	22
1.3	Théorèmes des accroissements finis	23
1.3.1	État des lieux	23
1.3.2	Le théorème des accroissements finis	23
1.3.3	Théorème de la moyenne	26
1.3.4	Influence du théorème des accroissements finis classique	28
1.3.5	Cinq applications du théorème des accroissements finis	29
1.3.5.1	Majoration du reste	29
1.3.5.2	Applications de différentielle nulle	30
1.3.5.3	Critère de différentiabilité d'une application partiellement différentiable	31
1.3.5.4	Suites d'applications différentiables	33
1.3.5.5	Image d'une application différentiable	35
1.4	Formule intégrale des accroissements finis	36
1.4.1	Intégrale d'une application continue à une variable réelle	36
1.4.2	Cinq propriétés de l'intégrale d'une application continue	40
1.4.2.1	Linéarité de l'intégrale	40
1.4.2.2	Norme de l'intégrale et relation d'ordre	40
1.4.2.3	Relation de Chasles	41
1.4.2.4	Transformation linéaire de l'intégrale	42

1.4.2.5	L'intégrale à valeurs dans un espace de dimension finie	43
1.4.3	Primitive d'une application continue	43
1.4.4	Continuité et différentiabilité sous le signe intégral	44
1.5	Exercices	47
2	L'équation $f(y) = x$	55
2.1	Difféomorphismes	55
2.1.1	Définitions	55
2.1.2	Observations	56
2.2	Théorème local d'inversion	58
2.3	Théorème des fonctions implicites	62
2.4	Submersions et théorème du rang constant	64
2.5	Théorème des extrema liés	70
2.6	Théorème local de division	72
2.7	Exercices	74
3	Différentiabilité d'ordre supérieur	77
3.1	Différentielle seconde	77
3.1.1	Premières définitions	77
3.1.2	Le théorème de Schwarz	79
3.1.3	Le théorème de Taylor-Young	82
3.1.4	Exemples d'applications deux fois différentiables	87
3.1.5	Conditions du second ordre pour les extrema et les extrema liés	92
3.1.6	Applications de plusieurs variables	95
3.1.6.1	Différentielles partielles secondes	95
3.1.6.2	Le hessien, le laplacien	99
3.1.6.3	Influence du théorème des accroissements finis	100
3.2	Différentielle d'ordre quelconque	102
3.2.1	Premières définitions	102
3.2.2	La différentielle d'ordre n et son calcul	104
3.2.3	Action « tronquée » d'une différentielle multiple	106
3.2.4	Le théorème de Schwarz	107
3.2.5	Le théorème de Taylor-Young	108
3.2.6	Exemples d'applications n -fois différentiables	110
3.2.7	Applications de plusieurs variables	112
3.3	Théorèmes de Taylor	115
3.3.1	Le point de vue Taylor-Lagrange	115
3.3.2	Influence du théorème des accroissements finis classique	116
3.3.3	Le point de vue « formule intégrale »	118
3.4	Fonctions convexes	118

3.4.1	Convexité et continuité	118
3.4.2	Convexité et différentiabilité	121
3.5	Exercices	125
4	Équations différentielles	133
4.1	Généralités	133
4.2	Les solutions maximales	136
4.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard	138
4.4	Existence et unicité de la solution maximale	142
4.5	Le théorème d'Arzela-Peano	147
4.6	Le théorème des bouts des solutions	149
4.7	Comparaison des solutions	152
4.8	Condition initiale et paramètre	159
4.8.1	Continuité par rapport à la condition initiale et au paramètre	160
4.8.2	Différentiabilité par rapport à la condition initiale	162
4.8.3	Le flot	167
4.8.4	Différentiabilité par rapport à la condition initiale et au paramètre	168
4.9	Équations différentielles linéaires	169
4.9.1	Considérations générales et théorème du résolvant	169
4.9.2	Que faire lorsqu'il y a un second membre ?	173
4.9.3	Que dire lorsque l'application A est constante ?	174
4.9.4	Cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie	175
4.9.5	Que dire lorsque l'application A est constante et l'espace vectoriel E de dimension finie ?	181
4.9.5.1	Complexification du couple (E, A)	182
4.9.5.2	Complexification de l'équation différentielle linéaire	182
4.9.5.3	Conclusion	183
4.10	Équations différentielles linéaires d'ordre entier	183
4.10.1	Quelques généralités	183
4.10.2	L'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n	185
4.10.3	Le wronskien	186
4.10.4	Structure des zéros d'une solution	187
4.10.5	Comment effectuer la méthode de variation des constantes dans le cas de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n	187
4.10.6	Que dire si les fonctions coefficients a_j sont constantes	190
4.11	Quelques équations aux dérivées partielles	193
4.11.1	Définition des équations aux dérivées partielles étudiées	193
4.11.2	Quatre propriétés du flot d'un champ de vecteur	194

4.11.3	Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations aux dérivées partielles semi-linéaires	200
4.12	Exercices	204
	Bibliographie	219
	Index	221